JSMS JUL 2017

by Fitri Aryani

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 2, Juli 2017
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif

Fitri Aryani[1], Muhammad Solihin.[2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id, muhammad300595@gmail.com

ABSTRAK

Trace matriks adalah jumlah dari elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujur sangkar. Makalah ini, membahas *trace* dari matriks real berpangkat bilangan bulat negatif. Didapatkan persamaan umum *trace* matriks real ukuran $2x2$ berpangkat bilangan bulat negatif yang dinotasikan dengan $tr(A_{2x2}{}^{-n})$. Persamaan umum $tr(A_{2x2}{}^{-n})$ dipecah menjadi dua bentuk yaitu persamaan umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif untuk *n* genap dan persamaan umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif untuk *n* ganjil. Invers matriks dan determinan matriks ukuran $2x2$ diperlukan dalam pembentukan persamaan umum tersebut. Syarat *trace* dari matriks real berpangkat bilangan bulat negatif adalah matriks ukuran $2x2$ harus memiliki invers.

Katakunci : *determinan, invers, perkalian matriks, pangkat matriks, trace,*

ABSTRACT

Trace matrix is the sum of the main diagonal elements of a square matrix. In this paper, we discuss the trace of matrix rank real negative integers, a common form of trace matrix obtained real size of power negative integer denoted by $tr(A_{2x2}{}^{-n})$. *The general formula of* $tr(A_{2x2}{}^{-n})$ *divided into two form, trace matrix power negative integer for eved n and odd n . inverse and the determinant of matrix 2x2 is required in the formation of general formula. Terms trace of matrix power real negative integer is a 2x2 matrix that has an inverse.*

Keywords *: determinant, inverse, matrix multiplication, power of matriks, trace.*

Pendahuluan

Salah satu kajian dasar dalam mempelajari ilmu matematika mengenai aljabar adalah matriks. Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan tersebut dinamakan entri dari matriks.Banyak hal yang dapat dihitung dari suatu matriks, seperti perkalian matriks, determinan, *Trace* matriks dan sebagainya. Perkalian matriks dapat dilakukan apabila memenuhi syarat yaitu jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua. *Trace* matriks adalah jumlah dari elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujur sangkar yang ordonya $n \times n$. Selanjutnya menurut Anton (1987), misalkan A adalah matriks bujur sagkar. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan kita definisikan det(A) sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Jumlah det(A) kita namakan determinan A.

Menurut Brezinski (2012), *trace* dari matriks berpangkat sering dibahas pada beberapa bidang matematika, seperti Analisis Jaringan, Teori Bilangan, Sistem Dinamik, Teori Matriks dan Persamaan Diferensial. Pada tahun 2015 J. Pahade and M. Jha, telah membahas mengenai *trace* dari suatu matriks yang berpangkat bilangan bulat positif, hasilnya berupa persamaan bentuk umum *trace* dari matriks tersebut.

Trace dari matriksyang berpangkat bilangan bulat positif, maka terlebih dahulu harus dikalikan matriks yang sama sebanyak pangkatnya. Namun, dengan menggunakan persamaan bentuk umum yang telah diperoleh maka tidak perlu lagi memfaktorkan matriks, sehingga dengan cepat dapat ditetukan *trace* matriks yang berpangkat bilangan bulat positif tersebut. Hal tersebutlah yang dilakukan oleh J. Pahade and M. Jha pada makalahnya (2015). Berdasarkan makalah tersebut yang hanya membahas mengenai *trace* dari matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat positif, maka penulis tertarik untuk melakukan kajian mengenai bentuk umum *trace* matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif atau *trace* $(A_{2\times2})^{-n}$.

Metode dan Bahan Penelitian

Penelitian ini dilakukan untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks 2×2 berpar (7) bilangan bulat negatif . Penelitian ini dimulai dengan diberikan matriks ukuran $A_{2\times2}$, dengan $A_{2\times2}$ mempunyai invers. Selanjutnya menentukan *trace* (A^{-1}) sampai *trace* (A^{-8}), menentukan rumus umum *trace* (A^{-n}) dengan n genap dan ganjil. Selanjutnya mengaplikasikan rumus umum untuk *trace* (A^{-n}) dengan n genap dan ganjil. Berikut diberikan landasan teori atau bahan-bahan yang diperlukan dalam pembahasan.

Definisi 1. [2] Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Definisi 2. [6] Misalkan A adalah matriks $m \times k$ dan B adalah matriks $k \times n$. Perkalian A dan B, dinotasikan dengan AB adalah matriks $m \times n$ dengan entri ke-(i, j) sama dengan jumlah perkalian dari elemen yang bersesuian dari baris ke-i dari A dan kolom ke-j dari B. Dengan kata lain, jika $AB = [c_{ij}]$, maka

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} \tag{1}$$

Definisi 3. [2] Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif A menjadi

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA \ldots A}_{n\ faktor} \quad (n > 0). \tag{2}$$

Akan tetapi, jika A dapat dibalik, maka dapat didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif menjadi

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n\ faktor}. \tag{3}$$

Definisi 4. [2] Misalkan A adalah matriks bujur sagkar. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan kita definisikan det(A) sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Jumlah det(A) kita namakan determinan A.

$$\det(A) = \sum \pm a_{1_{j1}} a_{2_{j2}} \cdots a_{n_{jn}} \quad . \tag{4}$$

Definisi 5. [2] Matriks bujur sangkar A_{nxn} mempunyai invers jika ada matriks B sehingga berlaku hubungan $AB = BA = I_n$ matriks B disebut sebagai Invers dari matriks A atau sebaliknya.

Definisi 6. [2] Misalkan $A = [a_{ij}]$ suatu matriks persegi berukuran $n \times n$, maka *trace* dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal matriks A dan dinotasikan dengan tr(A). Dinyatakan bahwa *trace* matriks A adalah:

$$tr(A) = \sum_i a_{ii} \tag{5}$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 2, Juli 2017
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Pembahasan mengenai *trace* suatu matriks telah di bahas oleh Pahade, dengan judul *trace of positive integer power of real matrices,* pada tahun 2015. Makalah tersebut membahas mengenai rumus umum *trace* dari matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat positif untuk *n* genap dan *n* ganjil. Berikut diberikan bentuk Persamaan Pahade [4]:
Untuk *n* genap:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r} \quad (6)$$

Untuk n ganjil:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r} \quad (7)$$

Hasil dan Pembahasan

Pembahasan berikut merupakan langkah-langkah pembentukan bentuk umum yang sesuai untuk menyelesaikan *trace* dari matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif. Pembentukan rumus umum terdiri dari *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif untuk *n* genap dan *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif untuk *n* ganjil. Pertama pembahasan *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif untuk *n* genap.

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d \in R$, dengan A mempunyai invers.

2. Menentukan det(A), *invers* (A) dan *tr*(A),.
   Invers dari matriks (A) yaitu:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

dan

trace A^{-1} yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A^{-1}) &= \frac{d}{ad-bc} + \frac{a}{ad-bc} \\ &= \frac{d+a}{ad-bc} \\ &= \frac{tr(A)}{\det(A)} \end{aligned} \quad (8)$$

3. Menentukan *trace* (A^{-2}) dan *trace* (A^4).

$$A^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{d^2+bc}{(ad-bc)^2} & -\frac{b(a+d)}{(ad-bc)^2} \\ -\frac{c(a+d)}{(ad-bc)^2} & \frac{bc+a^2}{(ad-bc)^2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya $tr(A^{-2})$ diperoleh:

$$tr(A^{-2}) = \frac{d^2+bc}{(ad-bc)^2} + \frac{bc+a^2}{(ad-bc)^2}$$

$$= \frac{a^2+2bc+d^2}{(ad-bc)^2}$$

$$= \frac{a^2+2ad+d^2-2ad+2bc}{(ad-bc)^2}$$

$$= \frac{(a+d)^2-2(ad-bc)}{(ad-bc)^2}$$

$$= \frac{(tr(A))^2-2\det(A)}{(\det(A))^2}$$

$$= \frac{tr(A^2)}{(\det(A))^2} \tag{9}$$

Berdasarkan Definisi 2 di peroleh matriks A^{-4} yaitu:

$$A^{-4} = A^{-2}A^{-2}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{d^2+bc}{(ad-bc)^2} & -\frac{b(a+d)}{(ad-bc)^2} \\ -\frac{c(a+d)}{(ad-bc)^2} & \frac{bc+a^2}{(ad-bc)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2+bc}{(ad-bc)^2} & -\frac{b(a+d)}{(ad-bc)^2} \\ -\frac{c(a+d)}{(ad-bc)^2} & \frac{bc+a^2}{(ad-bc)^2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, $tr(A^{-4})$ diperoleh:

$$tr(A^{-4}) = \left((\frac{d^2+bc}{(ad-bc)^2})^2 \right) + 2\left((-\frac{db-ba}{(ad-bc)^2})(-\frac{cd+ac}{(ad-bc)^2}) \right) + \left((\frac{bc+a^2}{(ad-bc)^2}) \right)$$

$$= \frac{d^4}{(ad-bc)^4} + \frac{4d^2bc}{(ad-bc)^4} + \frac{2b^2c^2}{(ad-bc)^4} + \frac{4dbac}{(ad-bc)^4} + \frac{4a^2bc}{(ad-bc)^4} + \frac{d^4}{(ad-bc)^4}$$

$$= \frac{d^4+a^4+4d^2bc+2b^2c^2+4dbac+4a^2bc}{(ad-bc)^4}$$

$$= \frac{(d+a)^4-4(d+a)^2(ad-bc)+2(ad-bc)^2}{(ad-bc)^4}$$

$$tr(A^{-4}) = \frac{(tr(A))^4-4(tr(A))^2(\det(A))+2(\det(A))^2}{(\det(A))^4}$$

$$= \frac{tr(A^4)}{(\det(A))^4} \tag{10}$$

Dengan melihat kembali Persamaan (9) dan (10) maka diperoleh:

$$tr(A^{-2}) = \frac{(tr(A))^2 - 2\det(A)}{(\det(A))^2} = \frac{tr(A^2)}{(\det(A))^2}$$

$$tr(A^{-4}) = \frac{(tr(A))^4 - 4(tr(A))^2(\det(A)) + 2(\det(A))^2}{(\det(A))^4} = \frac{tr(A^4)}{(\det(A))^4}$$

Hal yang sama dilakukan terus sampai trace matriks yang berpangkat bilangan negatif 8, yaitu:

$$tr(A^{-6}) = \frac{tr(A^6)}{(\det(A))^6}$$

$$tr(A^{-8}) = \frac{tr(A^8)}{(\det(A))^8}$$

sehingga dapat dibentuk kerumus umum $tr\ (A^{-n})$ untuk n genap yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n} \tag{11}$$

Dengan menggunakan Persamaan (6) diperoleh:

$$\begin{aligned} tr(A^{-n}) &= \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n} \\ &= \frac{\sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n} \end{aligned} \tag{12}$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai trace matriks berpangkat bilangan bulat negatif:

Berdasarkan Definisi 2 di peroleh matriks A^{-3} yaitu:

$$\begin{aligned} A^{-3} &= A^{-2}A^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{d^2+bc}{(ad-bc)^2} & -\frac{b(a+d)}{(ad-bc)^2} \\ -\frac{c(a+d)}{(ad-bc)^2} & \frac{bc+a^2}{(ad-bc)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{d^3+bcd+bc(a+d)}{(ad-bc)^3} & -\frac{a^2b+b^2c+bd(a+d)}{(ad-bc)^3} \\ -\frac{ac(a+d)+bc^2+cd^2}{(ad-bc)^3} & \frac{bc(a+d)+abc+a^3}{(ad-bc)^3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya, $tr(A^{-3})$ diperoleh:

$$\begin{aligned} tr(A^{-3}) &= \frac{d^3+bcd+bc(a+d)}{(ad-bc)^3} + \frac{bc(a+d)+abc+a^3}{(ad-bc)^3} \\ &= \frac{a^3+abc+bc(a+d)+bc(a+d)+bcd+d^3}{(ad-bc)^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{a^3 + d^3 + 3ad(a+d) - 3ad(a+d) + 3bc(a+d)}{(ad-bc)^3}$$

$$= \frac{(a+d)^3 - 3(a+d)(ad-bc)}{(ad-bc)^3}$$

$$= \frac{(tr(A))^3 - 3(\det(A))(tr(A))}{(\det(A))^3}$$

$$= \frac{tr(A^3)}{(\det(A))^3} \tag{13}$$

Berdasarkan Definisi 2 di peroleh matriks A^{-5} yaitu:

$$A^{-5} = A^{-3}A^{-2}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{d^3 + bcd + bc(a+d)}{(ad-bc)^3} & -\frac{a^2b + b^2c + bd(a+d)}{(ad-bc)^3} \\ -\frac{ac(a+d) + bc^2 + cd^2}{(ad-bc)^3} & \frac{bc(a+d) + abc + a^3}{(ad-bc)^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2 + bc}{(ad-bc)^2} & -\frac{b(a+d)}{(ad-bc)^2} \\ -\frac{c(a+d)}{(ad-bc)^2} & \frac{bc + a^2}{(ad-bc)^2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, $tr(A^{-5})$ diperoleh:

$$tr(A^{-5}) = \left(\frac{(a^2 + bc)[a^3 + abc + bc(a+d)] + [c(a+d)][a^2b + b^2c + bd(a+d)}{(ad-bc)^5} \right)$$

$$+ \left(\frac{[b(a+d)][ac(a+d) + bc^2 + cd^2] + (bc + d^2)[bc(a+d) + bcd + d^3]}{(ad-bc)^5} \right)$$

$$= \frac{\begin{array}{c} a^5 + d^5 + 5bc(a+d)^3 - 5a^2d^2(a+d) - 5ad(a+d)^3 + 5a^2d^2(a+d) + 5bc(a+d)^3 \\ -10abcd(a+d) + b^2c^2(a+d) \end{array}}{(ad-bc)^5}$$

$$= \frac{(a+d)^5 - 5(ad-bc)(a+d)^3 - 5(ad-bc)^2(a+d)}{(ad-bc)^5}$$

$$= \frac{(tr(A))^5 - 5(\det(A))(tr(A))^3 + 5(\det(A))^2(tr(A))}{(\det(A))^5}$$

$$= \frac{(tr(A))^5}{(\det(A))^5} \tag{14}$$

Dengan cara yang sama diperoleh,

$$tr(A^{-7}) = \frac{tr(A^7)}{(\det(A))^7} \tag{15}$$

Dengan melihat kembali Persamaan (13), (14) dan (15) maka diperoleh:

$$tr(A^{-3}) = \frac{(tr(A))^3 - 3(\det(A))(tr(A))}{(\det(A))^3} = \frac{tr(A^3)}{(\det(A))^3}$$

$$tr(A^{-5}) = \frac{(tr(A))^5 - 5(\det(A))(tr(A))^3 + 5(\det(A))^2(tr(A))}{(\det(A))^5} = \frac{(tr(A))^5}{\det(A)^5}$$

$$tr(A^{-7}) = \frac{tr(A^7)}{(\det(A))^7}$$

sehingga dapat dibentuk kerumus umum *tr* (A^{-n}) untuk *n* ganjil yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n} \tag{15}$$

Dengan menggunakan Persamaan (7) diperoleh:

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n}$$
$$= \frac{\sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n} \tag{16}$$

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut:
Diberikan matriks A_{2x2} dengan *A* mempunyai invers atau $\det(A) \neq 0$ maka:

1. Bentuk umum dari *trace* matriks real berpangkat bilangan bulat negatif untuk *n* genap, yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n}$$
$$= \frac{\sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n}$$

2. Bentuk umum dari *trace* matriks real berpangkat bilangan bulat negatif untuk *n* ganjil, yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n}$$
$$= \frac{\sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n}$$

Saran:

Penelitian membahas *trace* dari matriks yang berukuran 2×2 dengan entri-entrinya merupakan bilagan real. Oleh karena itu, disarankan untuk mengembangkan *trace* dari matriks yang berukuran lebih besar seperti matriks 3×3.

DaftarPustaka

[1] Brezinski, C. Fika, P. dan M. Mitrouli, " Estimations of the trace of powers of positive by extrapolation of the moment", *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 39, 144-155, 2012.
[2] H. Anton, " Elementary Linear Algebra", Fifth Ed., John Wiley & Sons, New York, 1987.
[3] I. Mahmud, "*Aljabar Linear Dasar"*, Erlangga, Jakarta, 2009.

[4] J. E. Gentle, "*Matrix Algebra*", Springer, New York, 2007.
[5] J. Pahade and M. Jha, "Trace of positive integer power of real 2×2Matrices", Advances in Linear Algebra & Matrix Theory, 5, 150-155, 2015.
[6] K. H. Rosen, "Discrete Mathematics and Its Application", Seventh Ed., McGraw-Hill, Singapore, 2007.
[7] R. Larson, "Elementary Linear Algebra", Seventh Ed., Brooks/Cole, Boston,2013.

JSMS JUL 2017

ORIGINALITY REPORT

25%	15%	17%	14%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

MATCH ALL SOURCES (ONLY SELECTED SOURCE PRINTED)

3%

★ F. B. Baulieu. "A classification of presence/absence based dissimilarity coefficients", Journal of Classification, 1989

Publication

Exclude quotes	On	Exclude matches	Off
Exclude bibliography	On		